数理解析研究所講究録 1382 巻 2004 年 90-102

ダブルアフィン Hecke 代数の表現と Young 図形

鈴木 武史 (京都大学数理解析研究所)

要旨

この講演及び報告は, Monica Vazirani 氏 (California 大学 Davis 校) との共同研究に基づく [SV].

よく知られているように, 対称群 (及び対応する Hecke 代数) の有限次元既約表現は Young ダイアグラムを用いて分類され, 各既約表現の構造は, 対応する Young 図形上のスタンダードタブローを用いて記述される. 対称群及び Hecke 代数の代りに, この稿では, (退化) ダブルアフィン Hecke 代数を用いたこの理論の拡張を与える.

前半では, (斜)Young ダイアグラムの一般化として, 無限個の箱からなる, ある種の周期性を持った斜 Young ダイアグラム (アフィンダイアグラムと呼ぶ) を考え, その上でタブローの理論を展開する.

後半では, 各アフィンダイアグラムに対して, その上の全てのスタンダードタブローで生成されるようなベクトル空間を考え, この空間上にダブルアフィン Hecke 代数の作用を具体的に定義する. 前半の結果を利用して, この表現は既約であることが示され, さらに, こうして構成される既約表現の族が, あるクラスの既約表現の完全代表系をなすことも示される.

1. アフィンダイアグラムとその上のタブロー

以下, $\mathbb{F}$ は任意の体とする. また, 整数 i,j に対し, 以下の記号を使う:

$$[i,j]=\{i,i+1,\ldots,j\}.$$

1.1. アフィンダイアグラム. $n\in\mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定し, 各 $m\in[1,n]$ に対し,

$$\mathcal{I}_m^n=\left\{(\lambda,\mu)\in\mathbb{Z}^m\times\mathbb{Z}^m \;\middle|\; \lambda_i>\mu_i\ (i\in[1,m]),\ \sum_{i\in[1,m]}(\lambda_i-\mu_i)=n\right\}$$

と置く. ここで, $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m)$, $\mu=(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m)$ である. 各 $(\lambda,\mu)\in\mathcal{I}_m^n$ に対し, $\mathbb{Z}^2$ の部分集合 λ/μ を

$$\lambda/\mu=\left\{(a,b)\in\mathbb{Z}^2 \mid b\in[1,m],\ a\in[\mu_b+1,\lambda_b]\right\} \tag{1.1}$$

で定義する. $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$ 及び $\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_m$ がそれぞれ減少列なら λ/μ は斜 Young ダイアグラムを与える.

$m \in [1,n]$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 及び $(\lambda, \mu) \in \mathcal{I}_m^n$ に対し, $\mathbb{Z}^2$ の部分集合 $\widehat{\lambda/\mu}_{(-\ell,m)}$ を次で定義する：

$$\widehat{\lambda/\mu}_{(-\ell,m)} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} (\lambda/\mu + k(-\ell, m)). \tag{1.2}$$

ここで, $\lambda/\mu + k(-\ell, m)$ は, $\lambda/\mu \subset \mathbb{Z}^2$ を $(-k\ell, km)$ だけ平行移動して得られる集合である：

$$\lambda/\mu + k(-\ell, m) = \{(a - k\ell, b + km) \in \mathbb{Z}^2 \mid (a, b) \in \lambda/\mu\}.$$

λ/μ 及び $\widehat{\lambda/\mu}_{(-\ell,m)}$ の元は箱 (box) とも呼ばれる.

$\mathcal{I}_m^n$ の部分集合

$$\mathcal{J}_{m,\ell}^n = \mathcal{I}_m^n \cap (\mathcal{D}_{m,\ell} \times \mathcal{D}_{m,\ell})$$

を考える. ここで,

$$\mathcal{D}_{m,\ell} = \{\mu \in \mathbb{Z}^m \mid \mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_m \text{ and } \ell \geq \mu_1 - \mu_m\},$$

である.

$\mathcal{J}_{m,\ell}^n$ は, $\widehat{\lambda/\mu}$ が無限個の箱からなる斜ダイアグラムと見なせるような (λ, μ) の集合である (下の例 1.1及び命題 1.3参照).

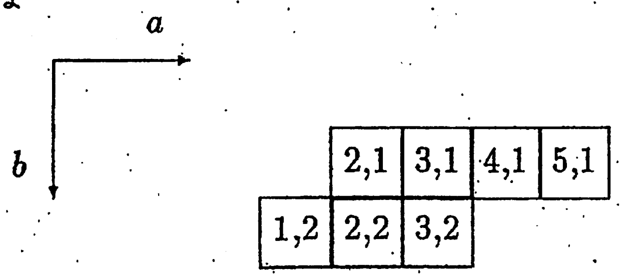
$(\lambda, \mu) \in \mathcal{J}_{m,\ell}^n$ のとき, $\widehat{\lambda/\mu}_{(-\ell,m)}$ を, (λ, μ) に付随したアフィンダイアグラムと呼ぶ.

以下では, 混乱の恐れのない限り, $(\lambda, \mu) \in \mathcal{J}_{m,\ell}^n$ に対して, $\widehat{\lambda/\mu}_{(-\ell,m)}$ を単に $\widehat{\lambda/\mu}$ で記す.

例 1.1. (i) $n = 7$, $m = 2$ として, $\lambda = (5, 3)$, $\mu = (1, 0)$ と置くと $(\lambda, \mu) \in \mathcal{I}_m^n$ であり, このとき,

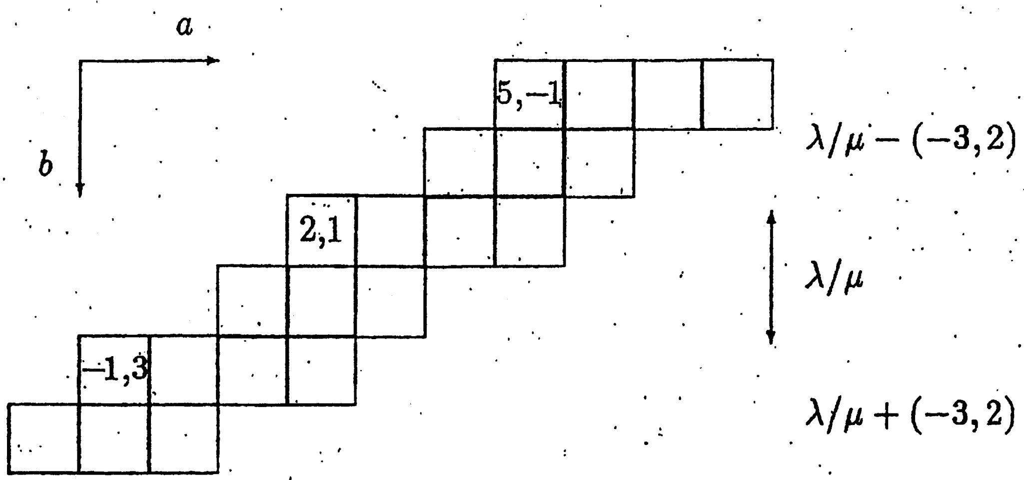
$$\lambda/\mu = \{(2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (1,2), (2,2), (3,2)\}.$$

これは

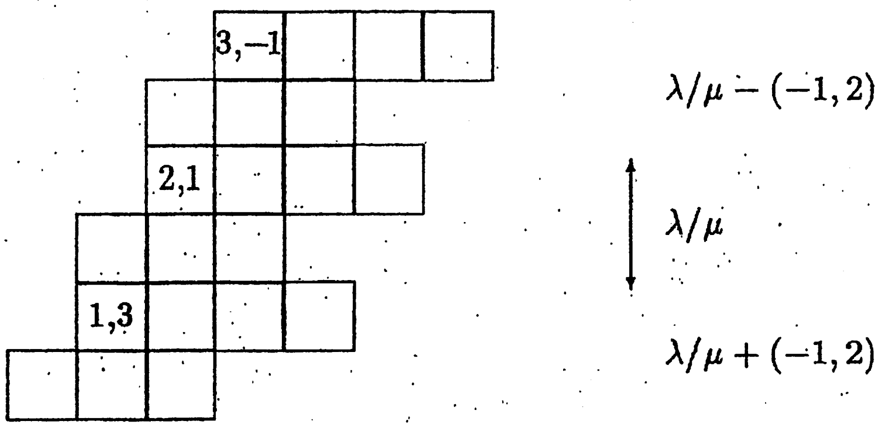


と図示される. (通常, 各箱の中の座標は省略される.)

(ii) 同様に $n = 7$, $m = 2$, $\lambda = (5, 3)$, $\mu = (1, 0)$ とし, さらに $\ell = 1$ と取ると, $(\lambda, \mu) \in \mathcal{J}_{m,\ell}^n$ である. このとき, $\widehat{\lambda/\mu}_{(-3,2)} = \bigsqcup_{k\in\mathbb{Z}} (\lambda/\mu + k(-3, 2))$ は以下のように図示される.



(iii) n, m, λ, μ を上と同じに取り，$\ell = 1$ とする．このとき，$(\lambda, \mu) \notin \mathcal{J}^n_{m,\ell}$ であり，$\widehat{\lambda/\mu}_{(-1,2)}$ を図示すると以下のようになる．



一般に，アフィンダイアグラムを次のように定義する．

定義 1.2. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ 及び $v \in \mathbb{Z}^2$ に対し，$\mathbb{Z}^2$ の部分集合 γ が，次の条件 (D1)(D2)(D3) を満たすとき，γ を周期 v 位数 n のアフィンダイアグラムと呼ぶ：

(D1) γ は v による平行移動で不変：$\gamma + v = \gamma$.

(D2) この γ 上の $\mathbb{Z}v$ 作用に関する orbit の数は n個：$\sharp(\gamma/\mathbb{Z}v) = n$.

(D3) もし $(a,b) \in \gamma$ 及び $i,j \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ に対し $(a+i, b+j) \in \gamma$ ならば，任意の $i' \in [0,i]$ 及び $j' \in [0,j]$ に対し $(a+i', b+j') \in \gamma$.

Γ_v^n により周期 v 位数 n のアフィンダイアグラムの集合を表し，

$$\Gamma_v^{*n} = \{\gamma \in \Gamma_v^n \mid \forall b \in \mathbb{Z},\ \exists (a,b) \in \gamma\}$$

と置く．すなわち，Γ_v^{*n} は，Γ_v^n の元であって，空行を持たないダイアグラムからなる集合である．

次の命題は容易に確かめられる：

命題 1.3. (i) $\Gamma_v^{*n} \neq \emptyset$ とすると，$m \in [1,n]$ 及び $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ を用いて $\Gamma_v^{*n} = \Gamma_{(-\ell,m)}^{*n}$ と書ける．($\Gamma_v^{*n} = \Gamma_{-v}^{*n}$ に注意.)

(ii) $m \in [1,n]$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とすると，任意の $(\lambda,\mu) \in \mathcal{J}_{m,\ell}^n$ に対し $\widehat{\lambda/\mu} \in \Gamma_{(-\ell,m)}^{*n}$ であり，この対応は次の全単射を与える：

$$\mathcal{J}_{m,\ell}^n \xrightarrow{\sim} \Gamma_{(-\ell,m)}^{*n}.$$

□

1.2. **アフィンダイアグラム上のタブロー.** 斜ダイアグラム λ/μ に対し，λ/μ から $[1,n]$ への全単射は λ/μ 上のタブローと呼ばれる．このタブローの概念はアフィンダイアグラム上に以下のように拡張される．

定義 1.4. $(\lambda,\mu) \in \mathcal{J}_{m,\ell}^n$ に対し，写像 $T : \widehat{\lambda/\mu} \to \mathbb{Z}$ が以下の条件 (T1)(T2) を満たすとき，T を $\widehat{\lambda/\mu}$ 上のタブローと呼ぶ：

(T1) T は全単射.

(T2) 各 $(a,b) \in \widehat{\lambda/\mu}$ に対し，$T(a-\ell, b+m) = T(a,b) + n$.

$\mathrm{T}ab(\widehat{\lambda/\mu})$ により，$\widehat{\lambda/\mu}$ 上の全てのタブローの集合を表す．

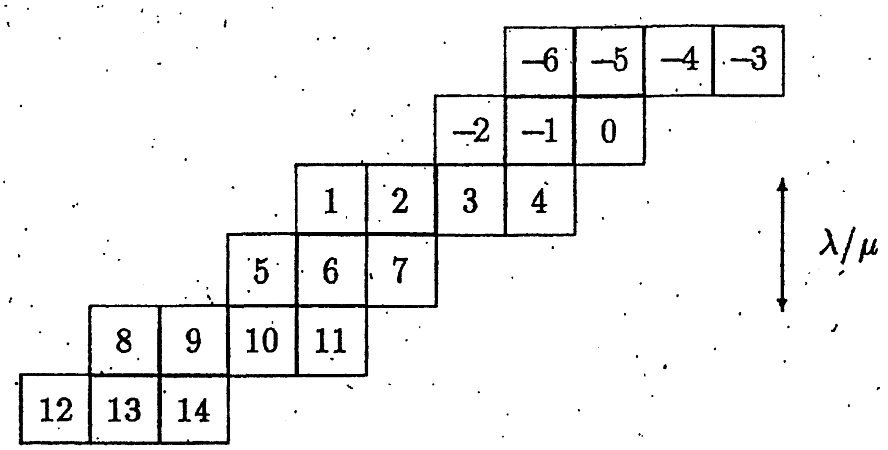
条件 (T2) により $\mathrm{T}ab(\widehat{\lambda/\mu})$ の元は λ/μ 上への制限で決定される．

また，$T : \lambda/\mu \to [1,n]$ を λ/μ 上のタブローとすると，T は $\widehat{\lambda/\mu}$ 上のタブローに一意的に拡張できる．

例 1.5. 例 1.1-(ii) と同様に，$n=7$, $m=2$, $\ell=3$ 及び $\lambda=(5,3)$, $\mu=(1,0)$ とする．λ/μ 上での値が次で与えられるような $\widehat{\lambda/\mu}$ 上のタブロー T_0 が一意的に存在する：

$$T_0(\mu_i + j, i) = \sum_{k=1}^{i-1}(\lambda_k - \mu_k) + j \quad (i \in [1,m],\ j \in [1, \lambda_i - \mu_i - 1]).$$

箱 $(a,b) \in \widehat{\lambda/\mu}$ の中に数 $T(a,b)$ を書き込んでタブローを表示することにすると，T_0 は次の様に表される：



定義 1.6. タブロー $T \in \mathrm{T}ab(\widehat{\lambda/\mu})$ が次の 2 条件を満たすとき, T を スタンダードタブローと呼ぶ：

(S1) $(a,b),(a+1,b) \in \widehat{\lambda/\mu} \Rightarrow T(a,b) < T(a+1,b)$.

(S2) $(a,b),(a,b+1) \in \widehat{\lambda/\mu} \Rightarrow T(a,b) < T(a,b+1)$.

$\mathrm{T}ab^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ により $\widehat{\lambda/\mu}$ 上のスタンダードタブロー全体の集合を表す.

上の例の T_0 はスタンダードタブローである.

1.3. **アフィン Weyl 群.** 以下では $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ とする. (実は $n = 1,2$ の場合も簡単な定義の修正だけで, 同じ議論が展開できる.)

定義 1.7. 以下の生成元と関係式で定義される群 $\widehat{W}_n$ を $\widehat{\mathfrak{gl}}_n$ の拡張アフィン Weyl 群と呼ぶ：

$$
\begin{aligned}
\text{生成元}:&\ s_i\ (i \in [0,n-1]),\ \pi^{\pm 1}.\\
\text{関係式}:&\ s_i^2 = 1\ (i \in [0,n-1]),\\
&\ s_i s_{i+1} s_i = s_{i+1} s_i s_{i+1}\ (i \in [0,n-2]),\\
&\ s_0 s_{n-1} s_0 = s_{n-1} s_0 s_{n-1},\\
&\ s_i s_j = s_j s_i\ (i-j \not\equiv \pm 1 \bmod n),\\
&\ \pi s_i = s_{i+1}\pi,\ (i \in [0,n-2]), \quad \pi s_{n-1} = s_0 \pi,\\
&\ \pi\pi^{-1} = \pi^{-1}\pi = 1.
\end{aligned}
$$

$\{s_1, s_2, \ldots, s_{n-1}\}$ で生成される $\widehat{W}$ の部分群は n 次対称群に他ならない.

群 $\widehat{W}$ の集合 $\mathbb{Z}$ 上への作用を次のように定める：

$$\begin{aligned} s_i(j) &= j+1 && \text{for } j \equiv i+1 \bmod n, \\ s_i(j) &= j-1 && \text{for } j \equiv i \bmod n, \\ s_i(j) &= j && \text{for } j \not\equiv i, i+1 \bmod n, \\ \pi(j) &= j+1 && \text{for all } j. \end{aligned}$$

特に, 任意の $w \in \widehat{W}$ 及び $j \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$w(j+n) = w(j) + n \tag{1.3}$$

が成り立っている.

$(\lambda, \mu) \in \mathcal{J}^n_{m,\ell}$ とし, $w \in \widehat{W}$ 及び $T \in \mathrm{Tab}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対し, $wT : \widehat{\lambda/\mu} \to \mathbb{Z}$ を

$$(wT)(a.b) = w(T(a,b)) \quad ((a,b) \in \widehat{\lambda/\mu}) \tag{1.4}$$

で定める. このとき, (1.3)より次が従う.

補題 1.8. 任意の $w \in \widehat{W}$ 及び $T \in \mathrm{Tab}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対して, $wT \in \mathrm{Tab}(\widehat{\lambda/\mu})$ である. 従って, (1.4)により, $\widehat{W}$ の $\mathrm{Tab}(\widehat{\lambda/\mu})$ 上への作用が定まる. □

各 $T \in \mathrm{Tab}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対し, 写像

$$\psi_T : \widehat{W} \to \mathrm{Tab}(\widehat{\lambda/\mu})$$

が, $\psi_T(w) = wT$ により定まる.

命題 1.9. 任意の $T \in \mathrm{Tab}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対して, 写像 $\psi_T : \widehat{W} \to \mathrm{Tab}(\widehat{\lambda/\mu})$ は全単射. □

各 $w \in \widehat{W}$ に対して,

$$R_w = \{(i,j) \in [1,n] \times \mathbb{Z} \mid i < j,\ w(i) > w(j)\} \tag{1.5}$$

と置く. 任意の w に対して, R_w は有限集合になることが知られており, R_w の元の数 $\sharp R_w$ は w の length と呼ばれる.

注意 1.10. 集合 R_w はルートの言葉を用いて理解するのが自然である.
実際, R_w はルートの集合

$$R'_w = \widehat{R}^+ \cap w^{-1}(\widehat{R}^+)$$

と一対一に対応している. ここで, $\widehat{R}^\pm$ は $A^{(1)}_n$ 型の正(負)実ルートの集合である.

対応は, $(i,j) \in R_w$ に対し, $j = \underline{j} + kn$ なる $\underline{j} \in [1,n]$ 及び $k \in \mathbb{Z}$ を取り, $\alpha_{i\underline{j}} + k\delta \in \widehat{R}$ (δ は null ルート) を対応させることで与えられる.

また，$w=\pi^r s_{i_1}s_{i_2}\dots s_{i_p}$ を w の簡約表示，すなわち，$p=\sharp R_w=\sharp R'_w$ とすると，

$$R'_w=\{\alpha_{i_p},s_{i_p}(\alpha_{i_{p-1}}),\dots,s_{i_p}s_{i_{p-1}}\dots s_{i_2}(\alpha_{i_1})\}$$

である．

1.4. Content 写像．命題 1.9で与えられた一対一対応

$$\psi_T:\widehat{W}\leftrightarrow \mathrm{Tab}(\widehat{\lambda/\mu})$$

のもとで，$\mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対応する $\widehat{W}$ の部分集合を記述するため，content 写像の概念を導入する．

写像 $C:\mathbb{Z}^2\to\mathbb{Z}$ を

$$C(a,b)=a-b\quad((a,b)\in\mathbb{Z}^2)$$

で定める．各 $T\in\mathrm{Tab}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対し，写像 $C_T^{\widehat{\lambda/\mu}}:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ を

$$C_T^{\widehat{\lambda/\mu}}(i)=C(T^{-1}(i))\quad(i\in\mathbb{Z})$$

で定め，$C_T^{\widehat{\lambda/\mu}}$ を T に付随した content 写像と呼ぶ．考えている $\widehat{\lambda/\mu}$ が明らかな場合は単に $C_T^{\widehat{\lambda/\mu}}=C_T$ と書く．

以下の，純粋に組み合わせ論的な命題は，いずれも直接的な方法により証明される．

補題 1.11. $(\lambda,\mu)\in\mathcal{J}^n_{m,\ell}$ 及び $T,S\in\mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ とする．このとき

$$C_T=C_S\Leftrightarrow T=S.$$

□

命題 1.12. $m,m'\in[1,n]$, $\ell,\ell'\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$. $(\lambda,\mu)\in\mathcal{J}^n_{m,\ell}$, $(\eta,\nu)\in\mathcal{J}^n_{m',\ell'}$ とする．ある $T\in\mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ 及び $S\in\mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\eta/\nu})$ に対して $C_T^{\widehat{\lambda/\mu}}=C_S^{\widehat{\eta/\nu}}$ となったとすると，$m=m'$, $\ell=\ell'$, かつ，ある $p\in\mathbb{Z}$ が存在して $\widehat{\lambda/\mu}=\widehat{\eta/\nu}+(p,p)$. □

各 $T\in\mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対し

$$\widehat{Z}_T^{\lambda,\mu}=\left\{w\in\widehat{W}\,\middle|\,C_T(i)-C_T(j)\notin\{-1,1\}\text{ for all }(i,j)\in R_w\right\},$$

と置く．

定理 1.13. 任意の $(\lambda,\mu)\in\mathcal{J}^n_{m,\ell}$ 及び $T\in\mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対し，

$$\psi_T^{-1}(\mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu}))=\widehat{Z}_T^{\lambda,\mu}.$$

□

証明は省略するが，ルート系と Coxeter 群に関する標準的な議論が中心である．

2. ダブルアフィン Hecke 代数とその表現

2.1. ダブルアフィン Hecke 代数. 以下で定義されるダブルアフィン Hecke 代数は, 1990 年代の前半に Cherednik [Ch2] によって導入されたが, その表現論が系統的に研究されはじめたのは比較的最近である [Ch3, Su, Va].

$n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ 及び $q \in \mathbb{F}$ を固定する.

定義 2.1. $\mathfrak{gl}_n$ のダブルアフィン Hecke 代数 $\ddot{H}_n(q)$ とは以下の生成元と関係式で定義される $\mathbb{F}$ 上の結合代数である.

生成元: $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, \pi^{\pm 1}, x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}, \xi^{\pm 1}$

関係式: $(t_i - q)(t_i + 1) = 0 \ (i \in [0, n-1])$,

$t_i t_j t_i = t_j t_i t_j \ (j \equiv i \pm 1 \bmod n)$,

$\pi t_i \pi^{-1} = t_{i+1} \ (i \in [0, n-2]), \ \pi t_{n-1} \pi^{-1} = t_0$,

$[x_i, x_j] = 0 \ (i \in [1, n])$,

$t_i x_i t_i = q x_{i+1} \ (i \in [1, n-1]), \ t_0 x_{n-1} t_0 = \xi^{-1} q x_1$

$t_i x_j = x_j t_i \ (j \not\equiv i, i+1 \bmod n)$,

$\pi x_i \pi^{-1} = x_{i+1} \ (i \in [1, n-1]), \ \pi x_n \pi^{-1} = \xi^{-1} x_1$,

$[\xi^{\pm 1}, h] = 0 \ (h \in \ddot{H}_n(q))$.

注意 2.2. $\{t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}, \pi\}$ で生成される $\ddot{H}_n(q)$ の部分代数 $\dot{H}_n(q)$ は $\mathfrak{gl}_n$ のアフィン Hecke 代数と呼ばれる. また, $\{t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ で生成される $\ddot{H}_n(q)$ の部分代数も $\dot{H}_n(q)$ と同型になることが知られている.

任意の $i \in \mathbb{Z}$ は $i = \underline{i} + kn \ (\underline{i} \in [1, n], \ k \in \mathbb{Z})$ と一意的に書けるので,

$$x_i = \xi^{-k} x_{\underline{i}}$$

により, 記号を拡張しておく.

各 $i \in [0, n-1]$ に対し, $\ddot{H}_n(q)$ の元 Φ_i を次のように取る:

$$\Phi_i = t_i (1 - x_i / x_{i+1}) + 1 - q. \tag{2.1}$$

次は直接計算で確かめられる:

補題 2.3. $\ddot{H}_n(q)$ において, 次が成り立つ:

$$\Phi_i \Phi_j \Phi_i = \Phi_j \Phi_i \Phi_j \ (j \equiv i \pm 1 \ mod\, n). \tag{2.2}$$

$$\Phi_i^2 = (1 - q x_i / x_{i+1})(1 - q x_{i+1} / x_i) \quad (i \in [0, n-1]). \tag{2.3}$$

$w \in \widehat{W}$ に対し,

$$\Phi_w = \pi^r \Phi_{i_1} \cdots \Phi_{i_k},$$

と置く．ここで $w=\pi^r s_{i_1}\cdots s_{i_k}$ は w の簡約表示 ($\sharp R_w=k$) である．補題 2.3により，Φ_w は簡約表示の取り方によらずに定まり，再び直接計算により次が確かめられる：

補題 2.4. $\Phi_w x_i = x_{w(i)}\Phi_w \quad (w\in\widehat{W},\ i\in\mathbb{Z})$. □

Φ_w は intertwining 作用素と呼ばれる．

次に，ウエイトの概念を導入する．まず $\mathfrak{X}$ を $x_1,\ldots,x_n,\xi$ で生成される自由群とする．群環 $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]=\mathbb{F}[x_1^{\pm 1},\ldots,x_n^{\pm 1},\xi^{\pm 1}]$ は $\ddot{H}_n(q)$ 可換部分代数である．

$\mathfrak{X}^*$ を $\mathfrak{X}$ の全ての指標の集合とする．$\mathfrak{X}^*$ の指標と $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ の指標は一対一に対応していることに注意しておく．

$\widehat{P}=\mathbb{Z}^{n+1}$ と置く．$\widehat{P}$ の元 $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n,\kappa)$ に対して，$\mathfrak{X}^*$ の元 χ_ζ が

$$\chi_\zeta(\xi)=q^\kappa,\quad \chi_\zeta(x_i)\in q^{\zeta_i}\ (i\in[1,n]).$$

で定まる．この対応を通して $\widehat{P}$ を $\mathfrak{X}^*$ の部分集合

$$\{\chi\in\mathfrak{X}^*\mid \chi(\xi)\in q^{\mathbb{Z}},\ \chi(x_i)\in q^{\mathbb{Z}}\ (i\in[1,n])\}$$

と同一視する．ここで $q^{\mathbb{Z}}=\{q^r\mid r\in\mathbb{Z}\}$ である．

$\ddot{H}_n(q)$ 加群 M 及び $\zeta\in\widehat{P}$ に対して，M の，ウエイト ζ に属するウエイト空間 M_ζ を以下のように定める：

$$M_\zeta=\left\{v\in M\,\middle|\,\xi v=q^\kappa v,\ \ x_i v=q^{\zeta_i}v\ (i\in[1,n])\right\}.$$

M_ζ の元をウエイトベクトルと呼ぶ．

$\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n,\kappa)\in\widehat{P}$ が与えられたとき，任意の整数 $i=\underline{i}+kn$ ($\underline{i}\in[1,n]$, $k\in\mathbb{Z}$) に対して，

$$\zeta_i=\zeta_{\underline{i}}-k\kappa$$

と置く．このとき，$v\in M_\zeta$ に対して $x_i v=q^{\zeta_i}v$ が任意の $i\in\mathbb{Z}$ で成り立つ．また，$\widehat{P}$ への $\widehat{W}$ の作用が，

$$w(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n,\kappa)=(\zeta_{w^{-1}(1)},\zeta_{w^{-1}(2)},\ldots,\zeta_{w^{-1}(n)},\kappa)$$

で定まる．

上の2つの補題から次が従う：

命題 2.5. M を $\ddot{H}_n$ 加群とする．$\zeta\in\widehat{P}$ 及び $w\in\widehat{W}$ に対して

(i) $v\mapsto\Phi_w v$ ($v\in M$) で与えられる線形写像 $M\to M$ はウエイト空間 M_ζ をウエイト空間 $M_{w(\zeta)}$ に写す．

(ii) ウエイト $\zeta=(\zeta_1,\zeta_2,\ldots,\zeta_n,\kappa)\in\widehat{P}$ に属するウエイト空間 M_ζ 上で，次が成り立つ：

$$\Phi_{w^{-1}}\Phi_w=\Pi_{(i,j)\in R_w}(1-q^{1+\zeta_i-\zeta_j})(1-q^{1-\zeta_i+\zeta_j}). \tag{2.4}$$

□

2.2. アフィンダイアグラムに付随した表現の構成. $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $m \in [1,n]$, $\ell \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ とする. また, 以下では常に $q \in \mathbb{F}$ は 1 の巾根でないと仮定する.

各 $(\lambda,\mu) \in \mathcal{J}^n_{m,\ell}$ に対し, 集合 $\mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ で生成されるベクトル空間を $V(\lambda,\mu)$ と記す. ただし, $T \in \mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対応する $V(\lambda,\mu)$ の元を v_T と書くことにする:

$$V(\lambda,\mu) = \bigoplus_{T \in \mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})} \mathbb{F}v_T. \tag{2.5}$$

$V(\lambda,\mu)$ 上の線形作用素 $\tilde{x}_i$ $(i \in [1,n])$ 及び $\tilde{\pi}$ を, それぞれ次のように定義する:

$$\tilde{x}_i v_T = q^{C_T(i)} v_T, \tag{2.6}$$

$$\tilde{\pi} v_T = v_{\pi T}. \tag{2.7}$$

ここで, 任意の $T \in \mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対して, $\pi T \in \mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ (証明は容易) に注意する.

さらに, $V(\lambda,\mu)$ 上の線形作用素 $\tilde{t}_i$ $(i \in [0,n-1])$ を次で定義する:

$$\tilde{t}_i v_T = \begin{cases} \frac{1-q^{1-\tau_i}}{1-q^{\tau_i}} v_{s_i T} - \frac{1-q}{1-q^{\tau_i}} v_T & \text{if } s_i T \in \mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu}), \\ -\frac{1-q}{1-q^{\tau_i}} v_T & \text{if } s_i T \notin \mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu}), \end{cases} \tag{2.8}$$

ここで,

$$\tau_i = C_T(i) - C_T(i+1) \quad (i \in [0,n-1])$$

である. 次の補題が容易に確かめられるので, $\tilde{t}_i$ は, q が 1 の巾根でない限り well-defined である:

補題 2.6. 任意の $i \in [0,n-1]$ 及び $T \in \mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対して, $\tau_i \neq 0$.
□

$\ddot{H}_n(q)$ の定義方程式を直接計算で確かめることにより, 次が示される:

定理 2.7. 各 $(\lambda,\mu) \in \mathcal{J}^n_{m,\ell}$ に対し, 代数準同型 $\ddot{H}_n(q) \to \mathrm{End}_{\mathbb{F}}(V(\lambda,\mu))$ であって,

$$t_i \mapsto \tilde{t}_i, \ \pi \mapsto \tilde{\pi}, \ x_i \mapsto \tilde{x}_i, \ \xi \mapsto q^{\ell+m}. \tag{2.9}$$

なるものが一意的に定まる. □

各 $T \in \mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対し

$$\zeta_T = (C_T(1), C_T(2), \ldots, C_T(n), \kappa) \in \widehat{P}$$

と置く. このとき,

$$C_T(w^{-1}(i)) = C(T^{-1}(w^{-1}(i))) = C((wT)^{-1}(i))$$

より

補題 2.8. 各 $T \in \mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ 及び $w \in \widehat{W}$ に対し，$w(\zeta_T) = \zeta_{wT}$. □

定理 2.9. (i) $V(\lambda,\mu) = \oplus_{T\in\mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})} V(\lambda,\mu)_{\zeta_T}$ であり，さらに，各 $T \in \mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対し $V(\lambda,\mu)_{\zeta_T} = \mathbb{F}v_T$.

(ii) $\ddot{H}_n(q)$ 加群 $V(\lambda,\mu)$ は既約.

証明. (i) 前半は定義より直ちに従う. 後半は補題 1.11より従う.

(ii) N を $\{0\}$ でない $V(\lambda,\mu)$ の部分加群とすると，N は少くとも一つウエイトベクトルを含むので，ある $T \in \mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対して $v_T \in N$ として良い.

定理 1.13により，任意の $S \in \mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})$ に対し $S = w_S T$ なる $w_S \in \widehat{Z}_T^{\lambda,\mu}$ が取れる.

$\tilde{v}_S = \Phi_{w_S} v_T$ と置くと，命題 2.5により，写像

$$\Phi_{w_S} : V(\lambda,\mu)_{\zeta_T} \to V(\lambda,\mu)_{w_S(\zeta_T)}$$

は可逆であるから，$w_S(\zeta_T) = \zeta_S$ (補題 2.8) と合わせて，

$$\tilde{v}_S \in V(\lambda,\mu)_{\zeta_S} \setminus \{0\}.$$

よって，(i) とから，$\oplus_{S\in\mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})} \mathbb{F}\tilde{v}_S = V(\lambda,\mu)$ が分かる. 従って，

$$N \supseteq \ddot{H}_n(q) v_T \supseteq \oplus_{S\in\mathrm{Tab}^{\mathrm{RC}}(\widehat{\lambda/\mu})} \mathbb{F}\tilde{v}_S = V(\lambda,\mu)$$

となり，$V(\lambda,\mu)$ は既約である. □

以上の既約 $\ddot{H}_n(q)$ 加群の構成は，Young による，Young ダイアグラムとタブローを用いた対称群の既約表現の構成，そして，Cherednik [Ch1] や Ram [Ra] による (退化) アフィン Hecke 代数に対するその一般化の，ダブルアフィン Hecke 版を与えている.

既約表現 $V(\lambda,\mu)$ は無限次元であるが，基底への代数の作用が完全に explicit に記述されている数少ない例と言える.

2.3. $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$-semisimple 表現. 引き続き $q \in \mathbb{F}$ は1の巾根でないと仮定する.

各 $\kappa \in \mathbb{Z}$ に対し，$\widehat{P}(=\mathbb{Z}^{n+1})$ の，$\mathbb{Z}^n \times \{\kappa\}$ に対応する部分集合を P_κ と記す. 対応する $\mathfrak{X}$ の指標 (= $\mathbb{F}[\mathfrak{X}]$ の指標) の集合は

$$\{\chi \in \mathfrak{X}^* \mid \chi(\xi) = q^\kappa,\ \chi(x_i) \in q^{\mathbb{Z}}\ (i \in [1,n])\}$$

である.

定義 2.10. $\mathcal{O}_\kappa^{ss}(\ddot{H}_n(q))$ を，有限生成 $\ddot{H}_n(q)$ 加群 M であって，

$$M = \bigoplus_{\zeta\in P_\kappa} M_\zeta$$

かつ $\dim M_\zeta < \infty$ $(\forall \zeta \in P_\kappa)$ なるものからなる集合とする.

次の定理は, intertwining 作用素を用いた構成的な手法で証明される (アフィン Hecke 代数の場合の Ram の証明 [Ra] の拡張)：

定理 2.11. $\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. L を $\mathcal{O}_\kappa^{ss}(\ddot{H}_n(q))$ に属する既約 $\ddot{H}_n(q)$ 加群とすると, $m \in [1,n]$ 及び $(\lambda,\mu) \in \mathcal{J}^n_{m,\kappa-m}$ が存在して $L \cong V(\lambda,\mu)$. □

注意 2.12. $\mathcal{O}_\kappa^{ss}(\ddot{H}_n(q))$ より一般的な表現のクラスに対して, 既約表現の分類が知られており ([Su, Va]), その結果を利用しても定理 2.11は証明できる.

$V(\lambda,\mu)$ のウエイトは $\mathrm{Tab}^{RC}(\widehat{\lambda/\mu})$ に付随する content 写像で与えられていたので, 次の定理は系 1.12より直ちに従う：

定理 2.13. $\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $m,m' \in [1,n]$ とする. $(\lambda,\mu) \in \mathcal{J}^n_{m,\kappa-m}$ 及び $(\eta,\nu) \in \mathcal{J}^n_{m',\kappa-m'}$ に対して,

$$\begin{aligned} & V(\lambda,\mu) \cong V(\eta,\nu) \\ \Leftrightarrow\quad & m = m' \textit{ and } \widehat{\lambda/\mu} = \widehat{\eta/\nu} + (p,p) \textit{ for some } p \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

□

以上の分類定理をもう少し整理しておく.

$\Omega = \langle \omega \rangle$ を, 元 ω で生成される自由群とする. Ω の $\mathbb{Z}^m$ 上の作用を

$$\omega \cdot \lambda = (\lambda_m + \ell + 1, \lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \ldots, \lambda_{m-1} + 1), \tag{2.10}$$

で定め, $\mathbb{Z}^m \times \mathbb{Z}^m$ 上の作用を $\omega \cdot (\lambda,\mu) = (\omega\cdot\lambda, \omega\cdot\mu)$ で定める. すると, Ω は $\mathcal{J}^n_{m,\ell}$ を保ち, さらに

$$\omega^p \cdot \widehat{\lambda/\omega^p} \cdot \nu = \widehat{\lambda/\mu} - (p,p) \quad (p \in \mathbb{Z})$$

が成り立っている. 従って, 命題 1.3の対応 $(\lambda,\mu) \mapsto \widehat{\lambda/\mu}$ は, 一対一対応

$$\Gamma^{*n}_{(-\ell,m)}/\mathbb{Z}(1,1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{J}^n_{m,\ell}/\Omega$$

を誘導する.

$\mathrm{Irr}\mathcal{O}_\kappa^{ss}(\ddot{H}_n(q))$ により, $\mathcal{O}_\kappa^{ss}(\ddot{H}_n(q))$ に属する既約表現の同型類の集合を表わす. 以上をまとめて, 次が得られる：

系 2.14 (cf. [Ch3]). $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ 及び $\kappa \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とする. 対応 $(\lambda,\mu) \mapsto \widehat{\lambda/\mu}$ 及び $(\lambda,\mu) \mapsto V(\lambda,\mu)$ は, 次の一対一対応を与える：

$$\bigsqcup_{m\in[1,n]} \Gamma^{*n}_{(-\kappa+m,m)}/\mathbb{Z}(1,1) \xleftrightarrow{\sim} \bigsqcup_{m\in[1,n]} (\mathcal{J}^n_{m,\kappa-m}/\Omega) \xleftrightarrow{\sim} \mathrm{Irr}\mathcal{O}_\kappa^{ss}(\ddot{H}_n(q)).$$

注意 2.15. 以上, ダブルアフィン Hecke 代数を扱ったが, $\mathfrak{gl}_n$ の退化アフィン Hecke 代数に対しても同様の議論で, 対応する結果を得ることができる.

References

[Ch1] I. V. Cherednik, *Special bases of irreducible representations of a degenerate affine Hecke algebra*, Funct. Anal. Appl. 20, No 1 (1986), 76-78.

[Ch2] I. Cherednik, *Double affine Hecke algebras, Knizhnik-Zamolodchikov equations, and Macdonald's operators*, Inter. Math. Res. Notices, 6 (1992), 171-179.

[Ch3] I. V. Cherednik, *Double affine Hecke algebras and differential Fourier transforms*, math.QA/0110024.

[Ra] A. Ram, *Skew shape representations are irreducible*, preprint (1998)

[Su] T. Suzuki, *Classification of simple modules over degenerate double affine Hecke algebras of type A*, Inter. Math. Res. Notices, 43 (2003), 2313–2339.

[SV] T. Suzuki and M. Vazirani, *Tableau theory on affine diagrams and irreducible representations of double affine Hecke algebra of type A*, in preparation.

[Va] E. Vasserot, *Induced and simple modules of double affine Hecke algebras*, ath.RT/0207127.